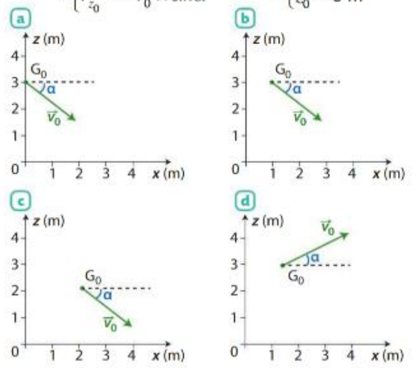
13 NIVEAU 1 ; les autres NIVEAU 2

13 Identifier les conditions initiales

| Interpréter des formules.

Parmi les schémas proposés ci-dessous, le(s)quel(s) tradui(sen)t les conditions initiales suivantes :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{x_0} = v_0 \times \cos\alpha \\ v_{z_0} = -v_0 \times \sin\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG_0} \begin{cases} x_0 = 1 \text{ m} \\ z_0 = 3 \text{ m} \end{cases}$$

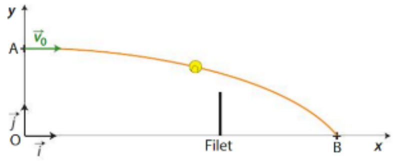


20 Appliquer la conservation de l'énergie (1)

| Effectuer des calculs.

Pour servir au tennis, un joueur placé en O lance une balle verticalement et la frappe en A à une hauteur $H = 2{,}7$ m au-dessus du sol.

La balle part avec une vitesse horizontale de valeur $v_0 = 126 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans un référentiel terrestre supposé galiléen. De masse m, elle n'est soumise qu'à son poids.



1. L'énergie mécanique de la balle est-elle constante ?

2. Montrer que l'expression de la valeur v_B de la vitesse de la balle lorsqu'elle touche le sol s'écrit :

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g \times H}$$

3. Calculer cette valeur. Utiliser le réflexe 4

Donnée

Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

25 Utiliser le théorème de l'énergie cinétique (2)

| Effectuer des calculs.

Un ion Mg^{2+} est produit dans la chambre d'ionisation d'un spectromètre de masse.

Cet ion pénètre en position A, avec une vitesse initiale de valeur négligeable, dans un champ électrique uniforme entre deux armatures planes parallèles. Il est accéléré jusqu'à la position B où il atteint une vitesse de valeur $v_B = 5{,}61 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

On étudie le mouvement de cet ion assimilé à un corps ponctuel G dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

On néglige le poids de l'ion Mg^{2+} devant la force électrique à laquelle il est soumis entre les positions A et B du condensateur plan.

1. Exprimer la variation de l'énergie cinétique de l'ion Mg^{2+} entre les positions A et B.

2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour exprimer la masse de l'ion Mg^{2+}. La calculer.

Données

- Tension appliquée entre les deux armatures : $U = 20$ kV.
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.
- Travail de la force électrique lors du déplacement d'une particule de charge q entre les positions A et B :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = q \times U_{AB}$$

28 Comment améliorer la performance d'un tir ?

| Utiliser un modèle pour prévoir ; effectuer des calculs.

L'artillerie a contribué, par son développement, à la fin de la guerre de Cent Ans.

1. On étudie la trajectoire du centre de masse G d'un boulet de canon dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen auquel on associe le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'origine des dates est choisie à l'instant où le boulet part du point O. Les actions de l'air sur le boulet sont négligées.

Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est incliné d'un angle α, appelé angle de tir, par rapport à l'horizontale.

a. Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre de masse du boulet lors du mouvement.

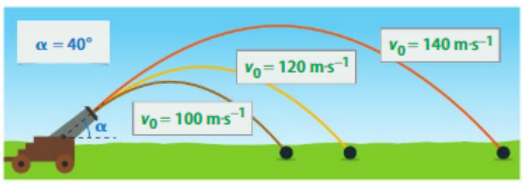
b. Montrer que les équations horaires du mouvement s'expriment sous la forme :

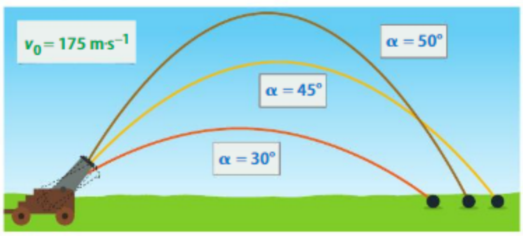
$$x = v_0 \times \cos\alpha \times t \text{ et } y = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t$$

c. Établir l'équation de la trajectoire du boulet.

d. Quelle est l'expression de l'abscisse d du boulet, encore appelée « portée », lorsqu'il repasse par la même altitude qu'à l'instant initial ?

2. Pour améliorer la performance de son tir, un artilleur décide d'étudier l'influence de la valeur v_0 de la vitesse initiale du lancer et de l'angle de tir α. Ses résultats sont schématisés ci-dessous.





a. À partir des figures proposées, indiquer comment évolue la portée du tir en fonction des paramètres testés.

b. Dans quelles conditions, parmi celles testées, l'artilleur obtient-il la plus grande portée ?

33 À chacun son rythme

L'expérience de J. J. Thomson

| Mobiliser et organiser ses connaissances ; rédiger une explication.

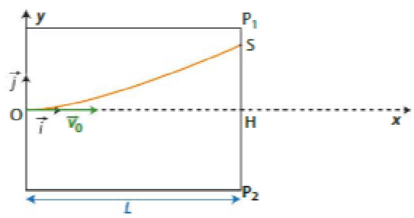
Commencer par résoudre l'énoncé compact. En cas de difficultés, passer à l'énoncé détaillé.

Au XIX[e] siècle, un défi pour les scientifiques est de déterminer les caractéristiques de l'électron : sa charge électrique $-e$ et sa masse m_e.

Joseph John Thomson conçoit un dispositif dans lequel un faisceau d'électrons est dévié lors de son passage entre deux plaques où règne un champ électrique. La mesure de la déviation du faisceau d'électrons lui permet alors de déterminer le rapport $\frac{e}{m_e}$.

À l'instant $t = 0$ s, l'électron arrive en un point O avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$.

L'électron, supposé ponctuel, est soumis à la seule force électrique $\vec{F}$. Son mouvement est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen. La trajectoire de l'électron dans un repère $(O ; x, y)$ est représentée sur le schéma ci-dessous :



À la sortie de la zone entre les plaques P_1 et P_2, l'électron a subi une déviation verticale HS comme indiqué ci-dessus.

Énoncé compact

Calculer le rapport $\frac{e}{m_e}$ à partir de l'équation de la trajectoire de l'électron.

Énoncé détaillé

1. Exprimer la force électrique qui s'applique sur l'électron.

2. En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer les équations horaires du mouvement de l'électron.

3. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron.

4. Calculer le rapport $\frac{e}{m_e}$.

Données

- Longueur des plaques : $L = 9{,}0 \times 10^{-2}$ m.
- Valeur de la vitesse initiale de l'électron : $v_0 = 2{,}4 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- Valeur du champ électrique : $E = 1{,}6 \times 10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.
- Hauteur atteinte par l'électron à la sortie des plaques : $HS = 2{,}0 \times 10^{-2}$ m.

Ex 1 : Cornhole (D'après Métropole 2021) - NIVEAU 2-3

***Le Cornhole**, contraction des mots anglais « corn » et « hole » voulant dire « maïs » et « trou », est un jeu de plein air pratiqué entre autres aux États-Unis et au Canada.*
Les règles de ce jeu sont assez simples. Chaque joueur est muni de quatre petits sacs contenant du maïs qu'il doit lancer en direction d'une planche inclinée par rapport à l'horizontale munie d'un trou circulaire et située environ à 8 mètres du joueur. À chaque fois qu'un sac retombe sur la planche, le joueur marque un point ; si le sac passe par le trou circulaire, le joueur marque trois points. Le premier joueur qui marque 21 points gagne la partie.

On étudie dans cet exercice les aspects énergétiques du lancer du sac puis le mouvement du centre de masse du sac dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Extrait du site Internet www.quora.com

Données :
- intensité de la pesanteur terrestre : $\boldsymbol{g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}}$;
- masse du sac : $\boldsymbol{m = 440\ g}$.

Un joueur se place à une distance d de la planche afin de réaliser un lancer de son sac de maïs. La situation est représentée sur la figure 1 ci-dessous. Afin de simplifier l'étude, la planche est considérée quasi-horizontale.
Dans le repère d'espace (Ox, Oz) muni des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{k}$, le sac de maïs est lancé, depuis une hauteur initiale H, avec une vitesse initiale dont le vecteur $\vec{v_0}$ est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On s'intéresse au mouvement du centre de masse G du sac. L'axe (Oz) du repère d'espace est vertical.

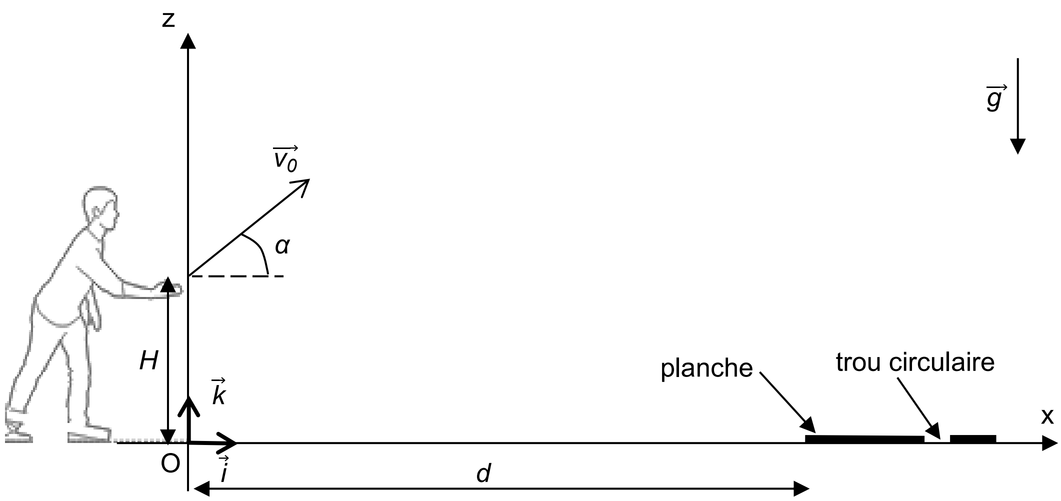


Figure 1. *Schéma représentant la situation du lancer du sac*

1. Étude énergétique

Le mouvement complet du sac est filmé puis étudié à l'aide d'un logiciel de pointage. Les données de la partie ascendante du mouvement sont traitées à l'aide d'un programme écrit en langage python (extrait en figure 2) qui permet de représenter l'évolution au cours du temps des énergies cinétique (E_c), potentielle de pesanteur (E_{pp}) et mécanique (E_m) du sac (figure 3).

```
#importation des bibliothèques utilisées
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# valeurs expérimentales
z=np.array([0.869,0.996,1.17,1.3,1.41,1.51,1.6,1.67,1.75,1.82,1.86,1.92,1.94,1.94,1.97,1.96,1.96])
t=np.array([0,0.033,0.067,0.1,0.133,0.167,0.2,0.233,0.267,0.3,0.333,0.367,0.4,0.433,0.467,0.5,0.533])
vx=np.array([7.61,7.66,7.712,7.517,7.595,7.578,7.334,7.39,7.329,7.184,7.239,7.116,7.065,7.119,6.997,7.006,6.997])
vz=np.array([4.8,4.484,4.158,3.797,3.219,2.787,2.515,2.314,2.008,1.827,1.447,0.9539,0.7198,0.3329,0.1782,
-0.02958,-0.4165])

#Calcul des énergies
m=0.440
g=9.81
? = (vx**2 + vz**2)**(1/2)
? = 0.5*m*v**2
? = m*g*z
? = 0.5*m*v**2 + m*g*z

```

Figure 2. *Extrait du programme écrit en langage python*

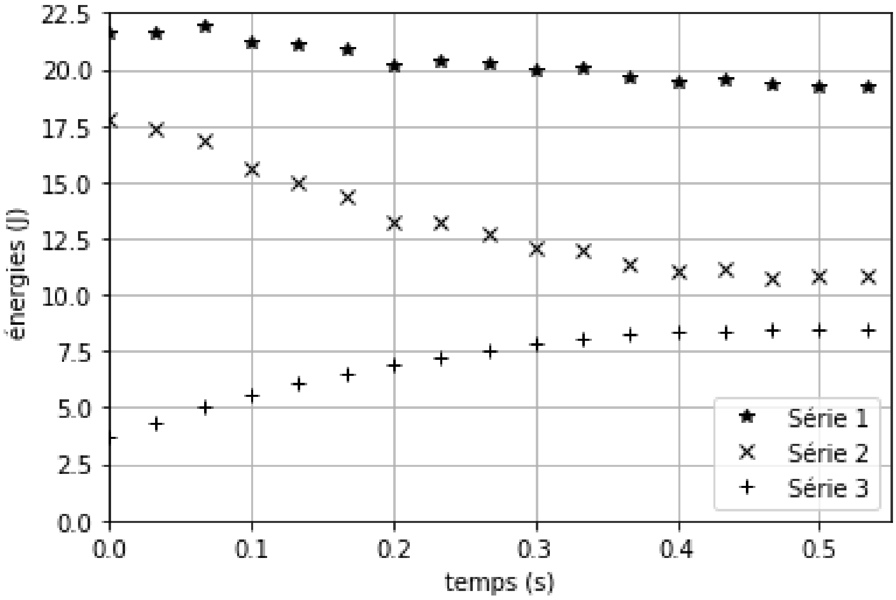


Figure 3. *Évolution des énergies cinétique, potentielle de pesanteur et mécanique du sac au cours du temps obtenue à l'aide du programme écrit en langage python*

1.1 Identifier les grandeurs calculées dans l'extrait du programme écrit en langage python (figure 2) aux lignes 15, 16, 17 et 18.

1.2 Exploitation de la figure 3 :

1.2.1 En justifiant votre choix, **attribuer** à chaque série l'énergie qui lui correspond.

1.2.2 **Expliquer** en quoi les résultats expérimentaux permettent de considérer que l'action de l'air sur le sac n'est pas négligeable devant le poids du sac.

1.2.3 **Estimer** la valeur de la vitesse initiale v_0 du centre de masse du sac.

1.2.4 **Estimer** la valeur de l'altitude initiale H du centre de masse du sac. **Commenter.**

2. Étude du mouvement du sac après le lancer

On souhaite étudier la chute du sac au cours du temps. La situation est toujours représentée sur la figure 1. Les frottements ne seront pas pris en compte dans cette partie.

On souhaite établir les expressions littérales des grandeurs accélération, vitesse et position du sac lors de son mouvement, ainsi que les caractéristiques (vitesse initiale et direction initiale) nécessaires à la réussite d'un lancer valant trois points.

Les dimensions de la planche sont précisées sur la figure 4 ci-dessous :

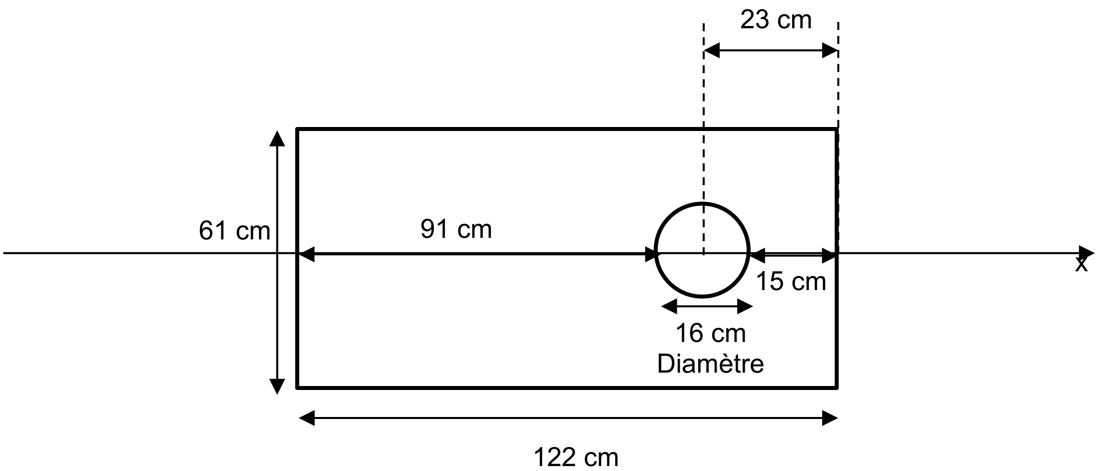


Figure 4. *Dimensions de la planche de Cornhole*

1. **Déterminer** les expressions littérales des coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse du sac suivant les axes Ox et Oz.

2. **En déduire** les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ de la position du centre de masse du sac au cours du mouvement.

3. **Montrer que** l'équation littérale de la trajectoire du centre de masse du sac dans le repère d'espace (Ox, Oz) est :

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + x \cdot \tan(\alpha) + H$$

Qualifier cette trajectoire.

4. **Indiquer** les paramètres initiaux de lancement sur lesquels le joueur peut avoir une influence et qui jouent un rôle pour la réussite d'un lancer à trois points.

Le joueur effectue un premier lancer. L'équation de la trajectoire du centre de masse du sac a pour expression numérique :

$$z(x) = -0{,}0842\ x^2 + 0{,}625\ x + 0{,}880 \qquad \text{avec } x \text{ et } z \text{ en m}$$

La distance d qui sépare l'origine O du repère d'espace et le bord de la planche est égale à d **= 8,0 m**.

5. **Déterminer** le nombre de point(s) marqué(s) par le joueur pour ce lancer.

6. Le joueur effectue un second lancer en conservant le même angle de tir α, la même hauteur initiale H mais en modifiant la valeur de la vitesse initiale par rapport au premier lancer.

Déterminer une valeur possible de la nouvelle vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ afin que le sac tombe directement dans le trou.
Commenter la valeur obtenue.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée

Ex 2 : SUPER HERO EN DANGER (D'après Amérique du Nord 2015) – NIVEAU 2-3

Démunis des superpouvoirs des supers héros traditionnels, le héros de bande dessinée Rocketeer utilise un réacteur placé dans son dos pour voler.
En réalité, ce type de propulsion individuelle, appelé Jet-Pack, existe depuis plus de cinquante ans mais la puissance nécessaire interdisait une autonomie supérieure à la minute. Aujourd'hui, de nouveaux dispositifs permettent de voler durant plus d'une demi-heure.

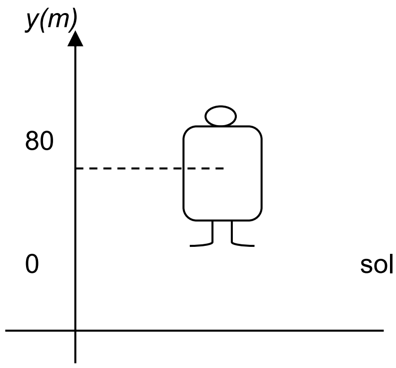
Données :
- masse initiale du système {Rocketeer et de son équipement} : m_R **= 120 kg** (dont 40 kg de fluide au moment du décollage) ;
- intensité de la pesanteur sur Terre : g **= 10 m.s^{-2}** ;
- les forces de frottements de l'air sont supposées négligeables.

Tous les Jet-Packs utilisent le principe de la propulsion par réaction. Lorsqu'un moteur expulse vers l'arrière un jet de fluide, il apparaît par réaction une force de poussée dont la valeur est égale au produit du débit massique de gaz éjecté par la vitesse d'éjection de ces gaz.

D'après Pour la Science – n°406 – août 2011

Problème technique

Après à peine quelques dizaines de mètres, le jet-pack ne répond plus et tombe en panne : au bout de 80 m d'ascension verticale, la vitesse de Rocketeer est nulle.
*Le « Super héros » amorce alors un mouvement de chute verticale. La position de Rocketeer et de son équipement est repérée selon l'axe Oy vertical dirigé vers le haut et la date **t = 0 s** correspond au début de la chute, soit à l'altitude **y_0 = 80 m**.*
***Le schéma ci-contre est tracé sans souci d'échelle**.*



1. Montrer que lors de cette chute, la position de Rocketeer est donnée par l'équation horaire :

$$y(t) = -5t^2 + 80 \qquad \text{avec } t \text{ en seconde et } y \text{ en mètre.}$$

2. À quelques kilomètres du lieu de décollage de Rocketeer se trouve le Manoir Wayne, demeure d'un autre super héros, Batman. Alerté par ses superpouvoirs dès le début de la chute de Rocketeer, ce dernier saute dans sa Batmobile, véhicule se déplaçant au sol.

Emplacement du Manoir Wayne :

http://batman.wikia.com

Quelle doit-être la valeur minimale de la vitesse moyenne à laquelle devra se déplacer Batman au volant de sa Batmobile pour sauver à temps son ami Rocketeer ? **Commenter**.

13 Identifier les conditions initiales

Les schémas (a) et (c) ne correspondant pas aux conditions initiales du vecteur position, on peut les éliminer.
Seul le schéma (b) correspond aux conditions initiales du vecteur position et du vecteur $\vec{v}_0$ qui a une coordonnée v_{z_0} négative ; c'est donc celui que l'on retient.

20 Appliquer la conservation de l'énergie (1)

1. La balle n'est soumise qu'à son poids qui est une force conservative. Son énergie mécanique est donc conservée.

2. $\Delta\mathscr{E}_{m_{A\to B}} = \mathscr{E}_{m_B} - \mathscr{E}_{m_A} = 0$

$$\mathscr{E}_{c_B} + \mathscr{E}_{p_B} - \left(\mathscr{E}_{c_A} + \mathscr{E}_{p_A}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}m \times v_B^2 + m \times g \times z_B - \left(\frac{1}{2}m \times v_A^2 + m \times g \times z_A\right) = 0$$

Avec $z_B = 0$, $v_A = v_0$ et $z_A = H$ m, il vient :

$$\frac{1}{2}m \times v_B^2 - \frac{1}{2}m \times v_0^2 - m \times g \times H = 0$$

soit $\frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_0^2 - g \times H = 0$.

En isolant v_B, on peut écrire : $v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g \times H}$.

3. $v_B = \sqrt{\left(\frac{126}{3{,}6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2 + 2 \times 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \times 2{,}7\ \text{m}}$

$v_B = 36\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La balle de tennis, lorsqu'elle touche le sol, a une vitesse de valeur $36\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

25 Utiliser le théorème de l'énergie cinétique (2)

1. La variation de l'énergie cinétique du système {un ion magnésium} entre A et B s'exprime par :

$$\Delta\mathscr{E}_{c_{A\to B}} = \mathscr{E}_{c_B} - \mathscr{E}_{c_A} = \frac{1}{2}m_{Mg^{2+}} \times v_B^2 - \frac{1}{2}m_{Mg^{2+}} \times v_A^2$$

Comme la valeur de la vitesse v_A est négligeable, la relation devient :

$\Delta\mathscr{E}_{c_{A\to B}} = \frac{1}{2}m_{Mg^{2+}} \times v_B^2$.

2. Dans un référentiel terrestre considéré galiléen et d'après le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta\mathscr{E}_{c_{A\to B}} = \sum_i W_{A\to B}(\vec{F}_i)$.

Comme le poids de l'ion est négligeable devant la force électrique, la relation précédente devient :

$\Delta\mathscr{E}_{c_{A\to B}} = W_{A\to B}(\vec{F})$ soit $\frac{1}{2}m_{Mg^{2+}} \times v_B^2 = q \times U = 2e \times U$.

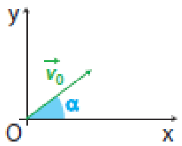
Il vient $m_{Mg^{2+}} = \frac{4e \times U}{v_B^2}$.

D'où $m_{Mg^{2+}} = \frac{4 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 20 \times 10^3\ \text{V}}{\left(5{,}61 \times 10^5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2}$

soit $m_{Mg^{2+}} = 4{,}1 \times 10^{-26}$ kg.

28 Comment améliorer la performance d'un tir ?

1.a. Le système étudié est le boulet modélisé par son centre de masse G dans un référentiel terrestre supposé galiléen.
Les conditions initiales sont schématisées ci-dessous.



Le boulet n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ car on néglige les actions dues à l'air.
D'après la deuxième loi de Newton,
$\sum\vec{F} = m\,\vec{a}$ avec $\sum\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$. Il vient $\vec{a} = \vec{g}$.
Le vecteur accélération du boulet soumis uniquement à son poids est égal au vecteur champ de pesanteur.

b. Les coordonnées du vecteur accélération sont :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}.$$

Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Pour déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse, il faut chercher les primitives de chaque coordonnée du vecteur accélération puis utiliser les conditions initiales indiquées.

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_x \\ v_y = -g \times t + C_y \end{cases}.$$

De plus $\vec{v}_0\begin{cases} v_{x_0} = v_0 \times \cos\alpha \\ v_{y_0} = v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$.

Il vient $\begin{cases} C_x = v_0 \times \cos\alpha \\ -g \times 0 + C_y = v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} C_x = v_0 \times \cos\alpha \\ C_y = v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$.

Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse s'écrivent :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y = -g \times t + v_0 \times \sin\alpha \end{cases}.$$

Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$.

Pour déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur position ou équations horaires, il faut chercher les primitives de chaque coordonnée du vecteur vitesse puis utiliser les conditions initiales indiquées.

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 \times \cos\alpha \times t + D_x \\ y = -\frac{1}{2}g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + D_y \end{cases}.$$

De plus $\overrightarrow{OP_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$.

Il vient $\begin{cases} v_0 \times \cos\alpha \times 0 + D_x = 0 \\ -\frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times \sin\alpha \times 0 + D_y = 0 \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases}$.

Les équations horaires du mouvement du boulet s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y = -\dfrac{1}{2}g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \end{cases}.$$

c. De l'équation horaire $x = v_0 \times \cos\alpha \times t$, on extrait :

$$t = \frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}.$$

On remplace t par son expression en fonction de x dans l'équation horaire $y = -\frac{1}{2}g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t$.

Il vient $y = -\dfrac{1}{2}g \times \left(\dfrac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \times \sin\alpha \times \dfrac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$

D'où $y = -\dfrac{g}{2v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x^2 + \tan\alpha \times x$.

C'est l'équation cartésienne de la trajectoire du boulet.

d. L'altitude initiale du boulet est $y_0 = 0$ m.

À l'aide de l'équation cartésienne de la trajectoire du boulet, cherchons, pour quelles abscisses, l'ordonnée est nulle.

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x^2 + \tan\alpha \times x.$$

D'où $\left(-\dfrac{g}{2v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x + \tan\alpha\right) \times x = 0$.

Il vient $x = 0$ m, position initiale du boulet où :

$$x = d = \tan\alpha \times \frac{2v_0^2 \times \cos^2\alpha}{g}.$$

Or, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ d'où $d = \dfrac{2v_0^2 \times \cos\alpha \times \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \times \sin 2\alpha}{g}$.

2.a. Pour un même angle α, la portée est d'autant plus grande que la valeur de la vitesse initiale v_0 du boulet est grande.

b. Pour une même valeur de vitesse initiale du boulet, la portée est maximale pour un angle α égal à 45°.

Remarque : ceci se retrouve avec la formule $d = \dfrac{v_0^2 \times \sin 2\alpha}{g}$ qui montre que d est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$, d'où $2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

33 À chacun son rythme

L'expérience de J. J. Thomson

1. L'électron est soumis à la force électrique qui a pour expression : $\vec{F} = -e\,\vec{E}$.

2. On étudie l'électron, objet ponctuel G, de masse m_e et de charge -e dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

L'électron n'est soumis qu'à la force électrique $\vec{F}$.

D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = m_e \vec{a}$.

Or, $\sum \vec{F} = \vec{F} = m_e\, \vec{a}$.

Il vient $\vec{a} = \dfrac{-e}{m_e} \times \vec{E}$.

Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération s'écrivent :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{e}{m_e} \times E \end{cases}.$$

Sur le schéma, l'électron est dévié vers le haut. La force électrique est donc orientée vers le haut et la coordonnée a_y est positive.

Pour écrire les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse, il faut chercher les primitives de chaque coordonnée du vecteur accélération puis appliquer les conditions initiales.

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\vec{v}\begin{cases} v_x = C \\ v_y = \dfrac{e}{m_e} \times E \times t + C_y \end{cases}$.

De plus, $\vec{v_0}\begin{cases} v_{x_0} = v_0 \\ v_{y_0} = 0 \end{cases}$.

Il vient $\begin{cases} C_x = v_0 \\ \dfrac{e}{m_e} \times E \times 0 + C_y = 0 \end{cases}$. D'où $\begin{cases} C_x = v_0 \\ C_y = 0 \end{cases}$.

Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse s'écrivent :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \dfrac{e}{m_e} \times E \times t \end{cases}.$$

Pour écrire les coordonnées cartésiennes du vecteur position, il faut chercher les primitives de chaque coordonnée du vecteur vitesse puis appliquer les conditions initiales.

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 \times t + D_x \\ y = \dfrac{e}{2m_e} \times E \times t^2 + D_y \end{cases}$.

De plus, $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \text{ m} \\ y_0 = 0 \text{ m} \end{cases}$.

Il vient $\begin{cases} v_0 \times 0 + D_x = 0 \\ \dfrac{e}{2m_e} \times E \times 0^2 + D_y = 0 \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases}$.

Les équations horaires du mouvement de l'électron s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 \times t \\ y = \dfrac{e}{2m_e} \times E \times t^2 \end{cases}.$$

3. De l'équation horaire $x = v_0 \times t$ on extrait $t = \dfrac{x}{v_0}$.

On remplace t par son expression en fonction de x dans l'équation horaire $y = \dfrac{e}{2m_e} \times E \times t^2$.

Il vient $y = \dfrac{e}{2m_e} \times E \times \left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2$ d'où $y = \dfrac{e \times E}{2m_e \times v_0^2} \times x^2$.

C'est l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron.

4. Lorsque l'abscisse de l'électron $x = L$ alors $y = \text{HS}$.

D'après l'équation de la trajectoire, $\text{HS} = \dfrac{e \times E}{2m_e \times v_0^2} \times L^2$.

Il vient $\dfrac{e}{m_e} = \dfrac{2v_0^2 \times \text{HS}}{E \times L^2}$

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2 \times (2{,}4 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 \times 2{,}0 \times 10^{-2}\text{ m}}{1{,}6 \times 10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1} \times (9{,}0 \times 10^{-2}\text{ m})^2}$$

$$\frac{e}{m_e} = 1{,}8 \times 10^{11}\ \text{C}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Ex 1 : Cornhole (D'après Métropole 2021) - Correction

1. Étude énergétique

1.1 Identifier les grandeurs calculées dans l'extrait du programme écrit en langage python (figure 2) aux lignes 15, 16, 17 et 18.

Ligne 15 ? = (vx2 + vz**2)**(1/2)** **Calcul de la vitesse v =** $\sqrt{v_x^2+v_z^2}$

Ligne 16 ? = 0.5*m*v2** **Calcul de l'énergie cinétique** $\frac{1}{2}.m.v^2$

Ligne 17 ? = m*g*z **Calcul de l'énergie potentielle de pesanteur** $E_{pp} = m.g.z$

Ligne 18 ? = 0.5*m*v2 + m*g*z** **Calcul de l'énergie mécanique** $E_m = E_C + E_{PP}$

1.2 Exploitation de la figure 3

1.2.1 En justifiant votre choix, attribuer à chaque série l'énergie qui lui correspond.

L'étude porte sur la partie ascendante du mouvement ainsi l'altitude *z* augmente donc E_{PP} augmente et correspond à la série 3.
La vitesse diminue, donc l'énergie cinétique aussi et correspond à la série 2.
Enfin l'énergie mécanique correspond à la somme $E_C + E_{PP}$ représentée par la série 1.

1.2.2 Expliquer en quoi les résultats expérimentaux permettent de considérer que l'action de l'air sur le sac n'est pas négligeable devant le poids du sac.

L'énergie mécanique diminue au cours du temps, ce qui montre que les frottements de l'air ne sont pas négligeables face à la force poids du sac.

1.2.3 Estimer la valeur de la vitesse initiale v_0 du centre de masse du sac.

On lit sur la figure 3, la valeur de l'énergie cinétique initiale $E_{C0} = \frac{1}{2}.m.v_0^2$ = 17,8 J soit $v_0 = \sqrt{\frac{2E_{C0}}{m}}$

$v_0 = \sqrt{\frac{2\times 17{,}8}{0{,}440}}$ **= 9,00 m.s^{-1}**

1.2.4 Estimer la valeur de l'altitude initiale *H* du centre de masse du sac. Commenter.

On lit sur la figure 3, la valeur de l'énergie potentielle initiale $E_{PP0} = m.g.H$ = 3,8 J

$H = \frac{E_{PP0}}{m.g}$ soit $H = \frac{3{,}8}{0{,}440\times 9{,}81}$ = 0,88 m

Cette valeur semble correcte, la figure 1 montre que H est environ à mi-hauteur du joueur.

2. Étude du mouvement du sac après le lancer

1. On applique la deuxième loi de Newton $\Sigma\overrightarrow{F_{Ext}} = m.\vec{a}$ au système {sac} dans le référentiel sol supposé galiléen.
Le système n'est soumis qu'à la force poids.

$\vec{P} = m.\vec{a}$ **soit** $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ **d'où :** $\vec{a} = \vec{g}$

En projection selon les axes Ox et Oz du repère choisi et compte tenu du sens du vecteur $\vec{g}$ indiqué sur le schéma il vient :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

2. En déduire les expressions littérales des équations horaires *x*(*t*) et *z*(*t*) de la position du centre de masse du sac au cours du mouvement.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ **donc a_x=** $\frac{dv_x(t)}{dt}$ **et** **a_z =** $\frac{dv_z(t)}{dt}$

Ainsi en primitivant on obtient $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_z(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ **:** $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0.cos\,\alpha \\ v_{0z} = v_0.sin\,\alpha \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ **=** $\vec{v}(t=0)$ **on a :**

v_0.cos α = Cte$_1$
v_0.sin α = 0 + Cte$_2$

Finalement : $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0.cos\,\alpha \\ v_z(t) = -g.t + v_0.sin\,\alpha \end{cases}$

À chaque instant $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ **donc** $v_x = \dfrac{dx(t)}{dt}$ **et** $v_z = \dfrac{dz(t)}{dt}$

En primitivant on obtient $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = v_0.cos\,\alpha.t + Cte_3 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0.sin\,\alpha.t + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à *t* = 0 s, le projectile est au point de coordonnées (*x*(0) = 0; *z*(0) = *H*) donc :

0 + Cte$_3$ = 0
0 + 0 + Cte$_4$ = H

Finalement, on obtient les équations horaires $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = v_0.cos\,\alpha.t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0.sin\,\alpha.t + H \end{cases}$

3. Montrer que l'équation littérale de la trajectoire du centre de masse du sac dans le repère d'espace (Ox, Oz) est :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cdot\cos^2(\alpha)} + x\cdot\tan(\alpha) + H$$

Qualifier cette trajectoire.

$t = \dfrac{x(t)}{v_0.cos\,\alpha}$ d'où : $z(x) = -\dfrac{1}{2}.g.\left(\dfrac{x}{v_0.cos\,\alpha}\right)^2 + v_0.sin\,\alpha.\dfrac{x}{v_0.cos\,\alpha} + H$

$z(x) = -\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{v_0^{\,2}.cos^2\,\alpha} + tan\,\alpha.x + H$ **Cette trajectoire est une parabole.**

4. Indiquer les paramètres initiaux de lancement sur lesquels le joueur peut avoir une influence et qui jouent un rôle pour la réussite d'un lancer à trois points.

Le joueur peut modifier la vitesse initiale v_0, l'angle α et l'altitude de départ *H*.

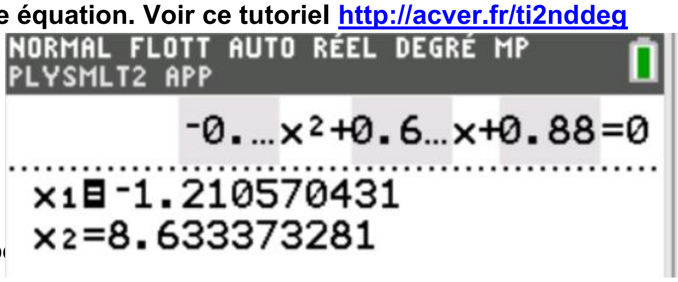
Le joueur effectue un premier lancer. L'équation de la trajectoire du centre de masse du sac a pour expression numérique : **$z(x) = -0{,}0842\,x^2 + 0{,}625\,x + 0{,}880$** avec *x* et *z* en m
La distance *d* qui sépare l'origine O du repère d'espace et le bord de la planche est égale à *d* = 8,0 m.

5. Déterminer le nombre de point(s) marqué(s) par le joueur pour ce lancer.

Déterminons l'abscisse *x* à laquelle le sac touche le sol *z* = 0 m.
$0 = -0{,}0842\,x^2 + 0{,}625\,x + 0{,}880$
$\Delta = 0{,}625^2 + 4\times0{,}0842\times0{,}880 = 0{,}687009$

$x_1 = \dfrac{-0{,}625 + \sqrt{0{,}687009}}{-2\times0{,}0842}$ **= –1,21 m** $x_2 = \dfrac{-0{,}625 - \sqrt{0{,}687009}}{-2\times0{,}0842}$ **= 8,6 m**

On peut aussi utiliser la calculatrice pour résoudre cette équation. Voir ce tutoriel http://acver.fr/ti2nddeg



On ne retient que la solution positive
x_2 = 8,6 m
Pour tomber dans le trou, il faudrait que
8,0 + 0,91 < *x* <8,0 + 0,91 + 0,16 m
8,91 < *x* < 9,07 m
Le sac arrive sur la planche car *x* > 8,0 m, mais ne tomb
Le joueur marque 1 point.

6. Le joueur effectue un second lancer en conservant le même angle de tir α, la même hauteur initiale H mais en modifiant la valeur de la vitesse initiale par rapport au premier lancer.

Déterminer une valeur possible de la nouvelle vitesse initiale v_0 , afin que le sac tombe directement dans le trou. Commenter la valeur obtenue.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

On reprend l'équation de la trajectoire $z(x) = -\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{v_0{}^2.cos^2\alpha} + tan\,\alpha.x + H$,

On cherche v_0 avec x = 9,0 m et z = 0.
Il faut déterminer α et H.
On avait $z(x) = -0{,}0842\,x^2 + 0{,}625\,x + 0{,}880$, donc par analogie tan α = 0,625 et H = 0,88 m.
α = arctan (0,625)
α = 32,0°

$0 = -\frac{1}{2}\times 9{,}81\times\frac{9{,}0^2}{v_0{}^2.cos^2 32} + tan32\times 9{,}0 + 0{,}880$ **soit** $0 = -\frac{552}{v_0{}^2} + 5{,}625 + 0{,}880$

$0 = -\frac{552}{v_0{}^2} + 6{,}505$ **d'où :** $\frac{552}{v_0{}^2} = 6{,}505$ **et finalement :** $v_0 = \sqrt{\frac{552}{6{,}505}}$ **= 9,21 m.s^{-1}**

V_0 = 9,21×3,6 = 33,2 km.h^{-1}
Cette valeur est élevée et on comprend la difficulté de ce sport car il faut allier force (pour atteindre une vitesse initiale suffisante) et précision (pour maitriser le geste et adapter α et H).

Ex 2 : SUPER HERO EN DANGER - Correction

1. Considérons le système M dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) en chute libre. Il n'est soumis qu'à son poids.

Appliquons la deuxième loi de Newton : $\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = m\cdot\overrightarrow{a_G}$ car m est constante
Or $\sum\vec{F} = \vec{P} = m\times\vec{g}$ donc $m\times\vec{g} = m\cdot\overrightarrow{a_G}$ soit $\vec{g} = \overrightarrow{a_G}$

Par projection sur l'axe Oy vertical orienté vers le haut, il vient **$a_y = -g$**

Or $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc en primitivant : $v_y(t) = -g\times t + C_1$ avec C_1 une constante
Or $v_y(0) = 0 = -g\times 0 + C_1 = C_1$ donc $v_y(t) = -g\times t$.

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, en primitivant on obtient : $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2$ avec C_2 une constante.
Or $y(0) = -\frac{1}{2}g\times O^2 + C_2 = C_2 = y_0$ donc $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient : $y(t) = -\frac{1}{2}\times 10\times t^2 + 80 = \mathbf{-5t^2 + 80}$

2. Il faut que Batman arrive sur le lieu de décollage avant que Rocketeer ne touche le sol.
D'après l'équation précédente, la durée de chute t_C est telle que $y(t) = -5t^2 + 80 = 0$

Donc $\boldsymbol{t} = \sqrt{\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{5}}} = \mathbf{4{,}0\ s}$

Il faut déterminer la distance que Batman doit parcourir en utilisant le schéma.
L'échelle donne 1 cm → 1 km
9,4 cm → d

d = 9,4 km à parcourir en t= 4,0 s, à la vitesse moyenne v= $\frac{d}{t} = \frac{9{,}4\times 10^3}{4{,}0} = 2{,}4\times 10^3\ m.s^{-1} = 8{,}6\times 10^3\ km.h^{-1}$
Pour que Rocketeer soit sauvé, il faut que la Batmobile roule à une vitesse impressionnante, proche de 7 fois la vitesse du son (Mach 7). Il semble impossible que Batman ait le temps d'intervenir.